

# **Die Poisson'sche Näherung**

## **Mathematik-Referat**

**Marc Antoni, 14.7.2003**

Ohmgymnasium Erlangen, 12. Jahrgangsstufe

## Problem der großen Zahlen bei Bernoulli Experimenten :

$$B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

wird bei großem  $n$  extrem groß

$$B(n; p; k) = \frac{\overbrace{n!}^{\text{}}}{(n-k)! \cdot k!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

	Maximaler Zahlenbereich	Größte berechenbare Fakultät
<b>Taschenrechner</b>	$9,999 \cdot 10^{99}$	69 !
<b>Tafelwerk</b>	-	499! , bei Bernoulliwahrsch. nur 200!
<b>Moderne Mikroprozessoren</b>	$3,14 \cdot 10^{4942} \otimes$	1754 !

$\otimes$  Zahl mit fast 5000 Dezimalstellen = 25 Meter lang, wenn je Ziffer 1 Kasten auf karierten Rechenpapier

Die Lösung für das Problem der Großen Zahlen fand der französische Physiker und Mathematiker Simon Dennis Poisson durch eine geschickte Umformung der uns bekannten Bernoulli Formel . Die sog. "Poisson-Verteilung" ging jedoch verloren und wurde erst 1889 wiederentdeckt.

## **Simon Dennis Poisson (1781-1840)**

### **Simon Denis Poisson (1781- 1840)**

**französischer Physiker und Mathematiker**



Poisson, Siméon Denis wurde am 21.6.1781 in Pithiviers (Loiret) geboren, und starb am 25.4.1840 in Paris.

Da Poisson nach dem Willen seines Vaters Arzt werden sollte wurde er nach der väterlichen Ausbildung zu seinem Onkel geschickt. Dieser sollte ihm die Kunst der Medizin näher bringen. Als er erstmals eigenständig an einen Patienten behandeln durfte verstarb dieser kurze Zeit später. Obwohl alle ihm versicherten, dass dies nicht sein Fehler gewesen sei wollte er nichts mehr mit diesem Beruf zu tun haben. So ging er von 1798-1800 als Schüler zur École Polytechnique nach Paris. 1802 übernahm er die Nachfolge Fouriers. Ab 1806 war er Professor der Analysis und Mechanik. 1808 wurde er Mitglied der Société d'Arcueil und ab 1812 des Institut de France.

Poisson arbeitete auf fast allen Gebieten der Physik (Gravitation, Elektro- und Magnetostatik, Wärmelehre, Astronomie) und außerdem in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Davon zeugen die vielen nach ihm benannten Begriffe: Poisson-Konstante, -Gleichung, -Gesetz, -Klammern, -Verteilung. Er schrieb etwa 300-400 Abhandlungen. Sein Buch "Traité de mécanique" (1811) war über viele Jahre Pflichtlektüre für Studierende der Physik

Poisson war Schüler von Lagrange und Laplace. Nach dem Tod von Laplace (1827) fühlte er sich als sein Nachfolger, übernahm aber auch dessen Unbeliebtheit bei seinen Kollegen. Aus diesem Grund wurde und wird im Ausland wohl mehr geschätzt als in Frankreich. Dort sprachen ihm manche jede Originalität ab. Sicherlich hatte er aber große Verdienste bei der Mathematisierung der Physik. Er besaß eine große Fähigkeit im Formalen. Green, Hamilton und Jacobi ließen sich von seinen Arbeiten inspirieren.

## Herleitung der Poisson Näherung

(Referent: Marc Antoni)

(1) Bernoulli Formel :

$$B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

(2)  $\binom{n}{k}$  ausschreiben :

$$B(n; p; k) = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

(3)

$$B(n; p; k) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-k) \cdot (n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-k) \cdot k!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

(4) Zwischengröße **m** definieren (Erwartungswert) :

[n = sehr groß] [p=sehr klein] Je kleiner p wird, desto mehr Stichproben müssen genommen werden.

$$m = n \cdot p \Rightarrow p = \frac{m}{n}$$

(4) in (3) :

$$B(n; p; k) = \frac{(n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{k!} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-k}$$

$$B(n; p; k) = \frac{m^k}{n^k} \cdot \frac{(n-k+1) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{k!} \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-k}$$

Vertauschen der Nenner & Aufspalten der Exponential Funktion  $(a^{b-c} = a^b \cdot a^{-c})$  :

$$B(n; p; k) = \frac{m^k}{k!} \cdot \frac{(n-k+1) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{-k}$$

Verteilung der jeweils k Stück Faktoren auf Einzelbrüche :

$$B(n; p; k) = \frac{m^k}{k!} \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{-k}$$

$$\underbrace{B(n; p; k)}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \approx 0}} = \underbrace{\frac{m^k}{k!}}_{\substack{\text{unverändert,} \\ \text{da } m=n \cdot p \\ \text{endliche Zahl}}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{k+1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{m}{n}\right)^n}_{\rightarrow e^{-m}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{m}{n}\right)^{-k}}_{\rightarrow 1}$$

Nur 2 Terme bleiben übrig :

$$\lim_{\substack{\underbrace{\phantom{n \rightarrow \infty}} \\ n \rightarrow \infty}} B(n,p;k) = \frac{m^k}{k!} \bullet e^{-m}$$

q.e.d.

## **Anwendungsbeispiel für die Poisson Näherung :**

### **Lotto " 6 aus 49 "**

Gegeben :

- Anzahl der Möglichkeiten den Lottoschein auszufüllen  $|\Omega|$

$$|\Omega| = \binom{49}{6} = 14000000 \Rightarrow p = \frac{1}{14000000}$$

(Trefferwahrscheinlichkeit für 6 Richtige)

- Anzahl der ausgefüllten Lottoscheine  $n = 7000\ 000$

Gesucht :

Wahrscheinlichkeit für 2 Hauptgewinne **k=2**

### **Lösung:**

a) Nach Bernoulli sehr schwer zu berechnen :

$$B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$
$$\frac{14000000!}{13999998! \cdot 2!} \cdot \left( \frac{1}{14000000} \right)^2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{14000000} \right)^{13999998}$$

b) Näherung nach Poisson :

$$B(n; p; k) \approx \frac{m^k}{k!} \cdot e^{-m}$$

$m = \text{Erwartungswert} = \text{durchschnittliche Trefferzahl bei } n = 7000.000 \text{ Experimenten}$

$$m = n \cdot p = \frac{7000000}{14000000} = 0,5$$

$$B = \frac{0,5^2}{2!} \cdot 2,7183^{-0,5} = 0,0758$$

$$B = 7,6\%$$